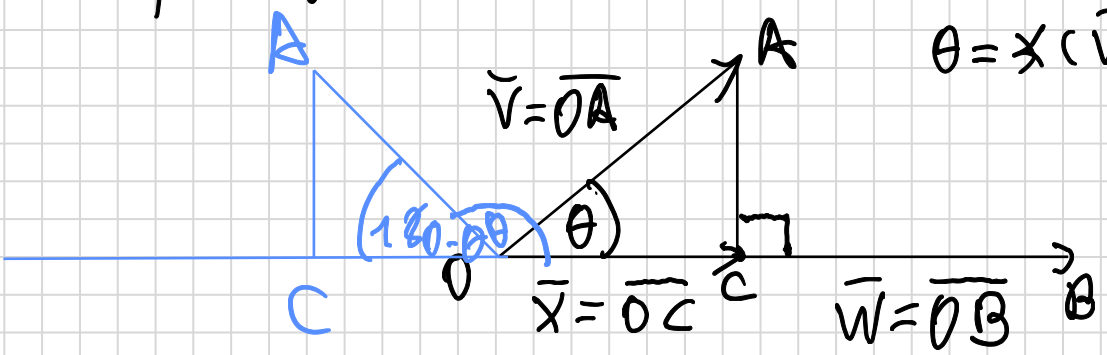
מכפלה סקלרית (המשך)

תזכורת: $\bar{v}\cdot\bar{w} = |\bar{v}||\bar{w}|\cos\measuredangle(v,w)$

6. הקשר בין מכפלה סקלרית והיטל.

יהי $\bar{w}\neq 0$ ויהי $\bar{v}$ וקטור כלשהו.

$\theta = \measuredangle(\bar{v},\bar{w})$



מה הווקטור של

$\bar{x}=\overline{OC}$

$|\bar{x}| = |\overline{OC}| = |\bar{v}||\cos\theta|$

$|\bar{x}| = |\overline{OC}| = |\bar{v}|\cos\theta =$

$= \frac{1}{|\bar{w}|}\cdot|\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta = \frac{1}{|\bar{w}|}\,\bar{v}\cdot\bar{w}$

$\bar{x} = \left(\frac{1}{|\bar{w}|}\cdot(\bar{v}\cdot\bar{w})\right)\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} =$

יחידה

פגיון

$= \left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{w}|^2}\right)\cdot\bar{w} =$

$= \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{w}|}\cdot\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} = \left(\bar{v}\cdot\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|}\right)\cdot\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} =$

$= (\bar{v}\cdot\hat{w})\cdot\hat{w}$

מכפלה וקטורית

עד כה שמענו איך עפים תוקף ל- $\mathbb{R}^n$.

המכפלה הוקטורית מוגדרת רק ב- $\mathbb{R}^3$.

יהיו $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$.

הווקטור $\bar{v} \times \bar{w}$ הוא

עם $|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}| \sin\measuredangle(\bar{v}, \bar{w})$

הגדרה שזוית $\bar{v} = \bar{0}$ או $\bar{w} = \bar{0}$ אז צד ימין הוא

אפס. נניח $\bar{v}, \bar{w} \neq \bar{0}$. אם $\measuredangle(\bar{v}, \bar{w}) = 0$

או $\measuredangle(\bar{v}, \bar{w}) = \pi$ אז $\sin\measuredangle(\bar{v}, \bar{w}) = 0$ ולכן

$\bar{v} \times \bar{w} = \bar{0}$.

נניח כעת כי $\bar{v}, \bar{w} \neq 0$ ובנוסף $0 < \measuredangle(\bar{v}, \bar{w}) < \pi$.

$\bar{v} \times \bar{w}$ הוא הוקטור שאורכו $|\bar{v}||\bar{w}| \sin\measuredangle(\bar{v}, \bar{w})$

ומאונך לכיוון מאונך למישור הנוצר ע"י

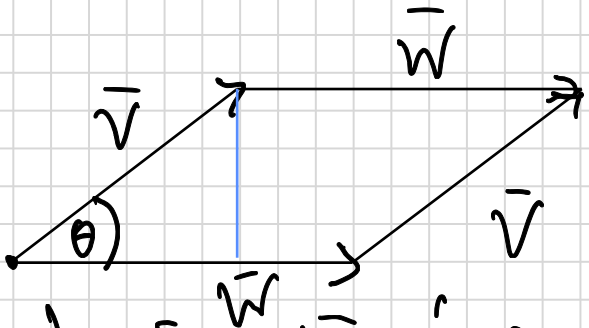
$\bar{v}, \bar{w}$ כיוונו הכיוון נקבע לפי כלל יד ימין.

בפרט $\bar{v}, \bar{w} \perp \bar{v} \times \bar{w}$

תכונות המכפלה הוקטורית:

1. $\bar{v} \times \bar{w}$ הוא וקטור ב- $\mathbb{R}^3$.
2. $|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{w} \times \bar{v}| = |\bar{v}||\bar{w}| \sin\measuredangle(\bar{v}, \bar{w})$
3. $\bar{v} \times \bar{w} = -\bar{w} \times \bar{v}$

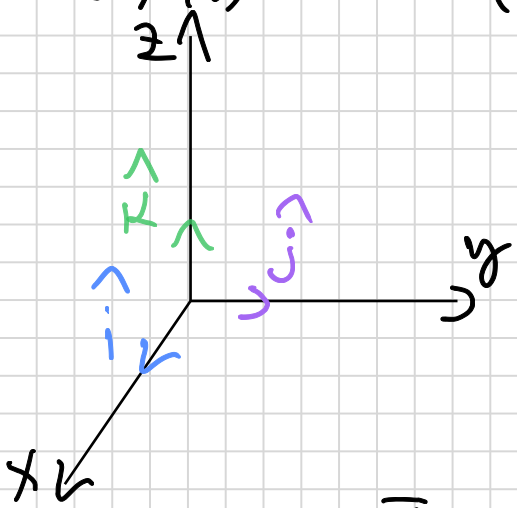
4. $|\bar{v}\times\bar{w}|$ הוא שטח המקבילית הנוצרת ע"י $\bar{v},\bar{w}$.



$h=|\bar{v}|\sin\theta$

שטח המקבילית $= h\cdot|\bar{w}| = |\bar{v}|\sin\theta\cdot|\bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}|\sin\theta = |\bar{v}\times\bar{w}|$

5. $\hat{i}=(1,0,0)$ $\hat{j}=(0,1,0)$ $\hat{k}=(0,0,1)$



$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$ $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$

$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\bar{0}$

הערה: $\bar{v}\parallel\bar{w} \iff \bar{v}\times\bar{w}=0$

לכן $\bar{v}\times\bar{v}=\bar{0}$ לכל $\bar{v}$

6. $\bar{v}\times(\bar{w}+\bar{z})=\bar{v}\times\bar{w}+\bar{v}\times\bar{z}$

$(\bar{v}+\bar{w})\times\bar{z}=\bar{v}\times\bar{z}+\bar{w}\times\bar{z}$

7. $\alpha\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=(\alpha\bar{v})\times\bar{w}=\bar{v}\times(\alpha\bar{w})$

8. $\bar{v}\times\bar{w}=(v_1,v_2,v_3)\times(w_1,w_2,w_3)=$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix}\cdot\hat{i}-\begin{vmatrix}v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}\hat{k}$$

$$=(v_2w_3-v_3w_2,\ v_3w_1-v_1w_3,\ v_1w_2-v_2w_1)$$

$$(v_1,v_2,v_3)\times(w_1,w_2,w_3)=$$

$$(v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k})\times(w_1\hat{i}+w_2\hat{j}+w_3\hat{k})=$$

$$\bar{0} \qquad \bar{0} \qquad \bar{0}$$

$$=(v_1\hat{i})\times(w_2\hat{j})+(v_2\hat{j})\times(w_1\hat{i})+\dots$$

$$\underbrace{v_1w_2\hat{k}\qquad -v_2w_1\hat{k}}_{(v_1w_2-v_2w_1)\hat{k}}$$

המכפלה המעורבת
(המכפלה המעלטרת)

בהינתן $\bar{v},\bar{w},\bar{z}\in\mathbb{R}^3$, המכפלה המעורבת של $\bar{v},\bar{w},\bar{z}$ היא

$$\underbrace{\bar{v}\cdot(\underbrace{\bar{w}\times\bar{z}}_{\text{וקטור}})}_{\text{סקלר}}$$

וקטור

המכפלה המעורבת נותנת סקלר.

תכונות:

1.

$$\bar{v}\cdot(\bar{w}\times\bar{z})=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(v_1 i + v_2 j + v_3 k)\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

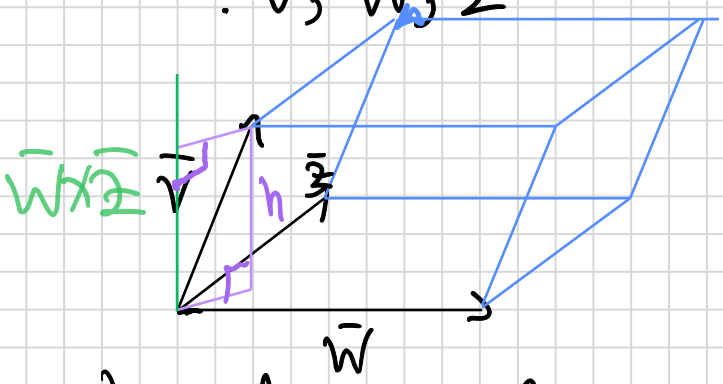
$$v_1 \begin{vmatrix} w_2 & w_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} w_1 & w_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

2. $\bar{v}\cdot(\bar{w}\times\bar{z}) = \bar{w}\cdot(\bar{z}\times\bar{v}) = \bar{z}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})$

$$\begin{vmatrix} \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{z} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \\ \bar{v} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \bar{z} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{vmatrix}$$

מעבר בין שלושת הוקטורים מורה.

3. $|\bar{v}\cdot(\bar{w}\times\bar{z})|$ הוא הנפח של המקבילון הנוצר ע"י $\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}$.



נפח המקבילון = $h\cdot$(שטח המקבילית ע"י $\bar{w},\bar{z}$) $= \left|\bar{v}\cdot\frac{\bar{w}\times\bar{z}}{|\bar{w}\times\bar{z}|}\right|\cdot|\bar{w}\times\bar{z}| = |\bar{v}\cdot(\bar{w}\times\bar{z})|$

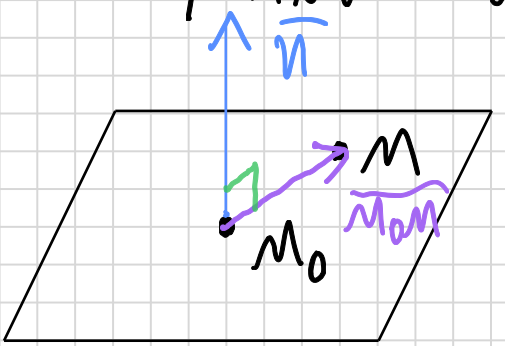
$h = \left|\bar{v}\cdot\frac{\bar{w}\times\bar{z}}{|\bar{w}\times\bar{z}|}\right|$ אורך ההטלה של $\bar{v}$ על הכיוון של $\bar{w}\times\bar{z}$

4. טענה: $\bar{v},\bar{w},\bar{z}$ הם קו-מישוריים

(קופלנרים) אם עוצר מקביל אורך
עם אורך נקודת התחלה הם מאונכים
מאינטרפרטציה מישור. מונון שקול, אם
הם תלויים לינארית. מונון שקול, אם
$\bar{v}\cdot(\bar{w}\times\bar{z})=0$.

מישור (מרחב)

מהנתון נקודה במרחב $M_0=(x_0,y_0,z_0)$
ווקטור שונה מאפס $\bar{n}=(A,B,C)\neq\bar{0}$,
המישור העובר דרך M_0 ומאונך
ל- $\bar{n}$ הוא אוסף של הנקודות
עבורן $M=(x,y,z)$ $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$.



הערה
$\bar{0}=\overline{M_0M_0}\perp\bar{n}$
M_0 על המישור.

$$\overline{M_0M}\perp\bar{n}$$

$$\overline{M_0M}\cdot\bar{n}=0$$

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(A,B,C)=0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

וזו משוואה של מישור.

כיוון שגם, אם A,B,C,D מספרים

ו- $(A,B,C)\neq 0$, אז $Ax+By+Cz+D=0$

הוא משוואה של מישור שמאונך ל-

$$\bar{n}=(A,B,C)$$

ומאחר $x=-D/A$ $y=z=0$ המשוואה מתקיימת

לכן המישור מאונך ל- $\bar{n}$ ומאחר ויש

$(-D/A,0,0)$ – יה מתנתה ש- $A\neq 0$.

$(0,-D/B,0)$ – אם $B\neq 0$

$(0,0,-D/C)$ – אם $C\neq 0$